

Wigner分布で 信号の時間-周波数解析をする

川浦 淳一

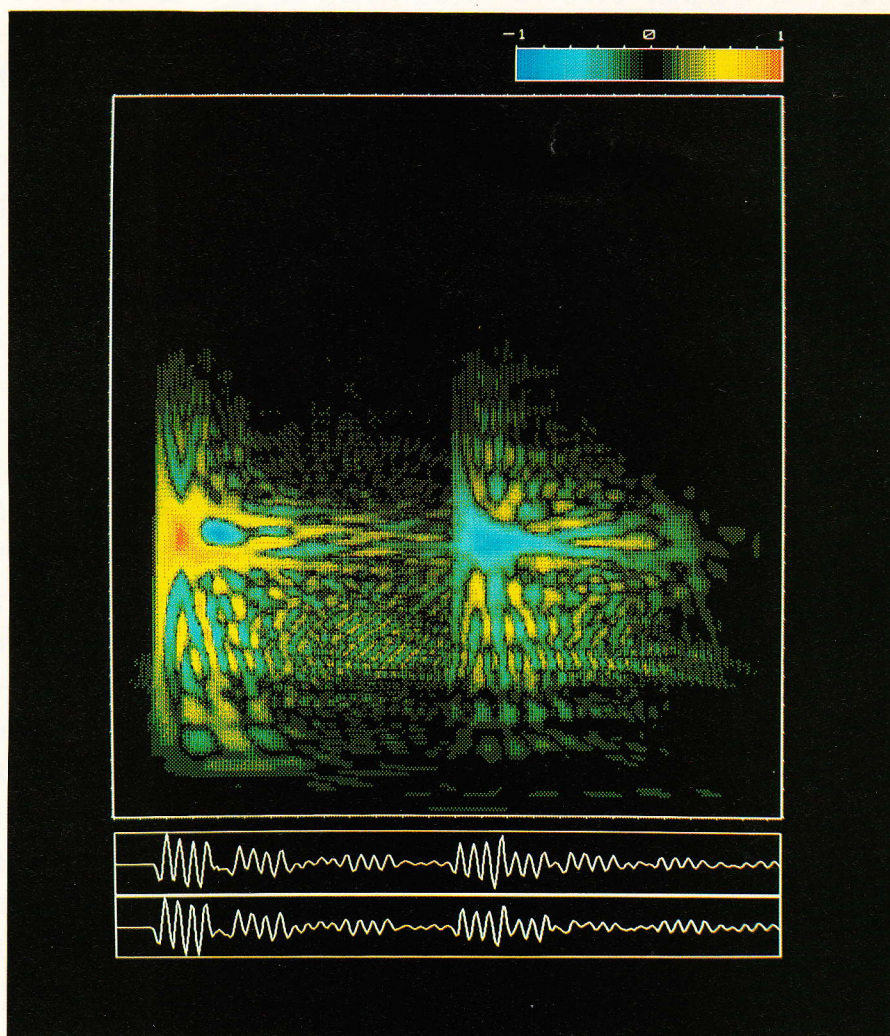
鈴木 英男

小野 隆彦

小野測器 音響技術研究室

信号のスペクトルが時間とともにどう変化していくのか、その新しい解析手法として Wigner 分布の研究が盛んになってきた。時間と周波数の二つの変数をもつ 2 次元分布関数である Wigner 分布は、時間-周波数分解能が高く、過渡的信号の性質をこれまでになくよくとらえることができる可能性があるからである。分布関数が負の値をとったり、クロス項が現れるなど問題もあるが、応用次第では強力な道具になると研究者はみている。

(本誌)



Wigner 分布とその特徴.....	p.165
演算時の手法.....	p.170
応用例.....	p.173

音響信号処理などの分野で、時間-周波数解析(信号の周波数分布の時間変化を調べること)の新しい手法として、Wigner 分布の研究が急速に増えつつある。Wigner 分布自体は、1932年に量子力学の分野において Wigner が発表した、低温時の量子状態の確率の補正に関する論文¹⁾のなかで初めて提唱された。しかし、量子力学以外で多くの関心と呼ぶのは、1980年代に入ってオランダのフィリップス社(N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken)の Claasen, Mecklenbräuker による「再発見」^{2)~4)}が行なわれた後のことである。特に、音響機器、それもスピーカ関連の分野では、大きな関心と呼んでいる。この分野では、古くから cumulative attack (decay) spectrum などの時間-周波数分布関数が解析に用いられており、より優れた時間-周波数分布関数に対する要求が常にあったからである。

刻々と性質が変化する信号の解析に向く

Wigner 分布は、ひと言で言うと、非定常信号⁺に対して拡張された瞬時のパワー・スペクトルであると考えられる。また実際、Wigner 分布は、時間と周波数の二つの変数をもつ2次元の分布関数であり、時間に関して積分すると信号のエネルギー・スペクトルに完全に一致する。同様に周波数に関する積分が、信号の瞬時パワーに一致するという性質をもっている。式の上から見ると、Wigner 分布の定義には、従来のパワー・スペクトルの定義において(つまり相関関数の定義において)実行される時間平均操作が含まれないために、時間の変数が残る。その結果、時々刻々とその性質が変化するような信号に対しても、高い分解能でその性質をとらえることが可能となっていると考えられる。

実際、われわれの周りに存在する信号は、定常であるものの、ほぼ定常とみなせるものばかりではない。人工的な信号はまだしも、騒音や雑音といったものには過渡的なもの、非定常なものが多い。そのような信号の性質をありのままにとらえ、特徴を見いだすためには、従来のパワー・スペクトルでは不十分であると思われる。このような信号に対

して、Wigner 分布を用いることで、より多くの情報を引き出すことができる可能性がある。

ここで、時間-周波数分布の意義について言及しておく必要があるだろう。まず、過渡的信号、非定常信号の特徴は、その周波数成分組成が時間的に変化するることであるといえる。たとえば、1 kHz の正弦波をなめらかな時間窓によって 10 ms の長さだけ切り出した信号があるとしよう。このとき、この信号は、10 ms の時間幅だけ存在し、その大きさがなめらかに変化する 1 kHz の周波数成分のみによって、主に成り立っていると考えることは自然であろう。もちろん、従来のパワー・スペクトルの考え方により、時間的に一切変化しない無数の周波数成分の和として表現することも可能である。どちらが正しいかという議論はまったく無意味であるが、時間的に性質が変化する信号に対しては、やはり時間的に変化する組成を考える方が、より受け入れやすいと思われる。Wigner 分布をはじめとする、時間-周波数分布関数によって与えられるイメージにより、われわれは、過渡的、非定常信号の時間的に変化する周波数構造をうかがい知ることができる。パワー・スペクトルや、時間信号からのみでは、これは容易なことではない。

Wigner 分布の応用例はまだそれほど多くはない。比較的早くから実用的レベルで応用された分野は、スピーカの音響特性の把握⁵⁾であろう。また、光学関係の応用も早くから試みられていたようである。わが国でも、過渡的騒音の解析などで精力的な応用研究が進んでいる。われわれは、最近注目されている音響計測法である、音響インテンシティ計測に Wigner 分布を応用することで、過渡的、あるいは非定常の音場の解析を試みている⁶⁾。

以下に、この大きな可能性をもった新しい信号解析手法である Wigner 分布について紹介する。従来の解析法との比較、実用的計算法についても述べる。最後に、Wigner 分布の具体的な応用例の一つとして、われわれが行なった音響インテンシティ計測への応用について、実験結果などを交えて紹介することにする。

Wigner分布とその特徴

Wigner 分布の定義

まず, Wigner 分布の定義を述べる。二つの時間関数 $x(t)$, $y(t)$ の cross-Wigner 分布は, 次式で定義される。

$$W_{xy}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau/2) y^*(t-\tau/2) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (1)$$

f は周波数, $*$ 印は共役複素数を示す。

auto-Wigner 分布は, $x(t)$ と $y(t)$ が等しいという特殊な場合とみなせるので, 特にことわらないかぎり, 以下 cross-Wigner 分布のみについて話を進めることにする。

さて, ここで,

$$R_{xy}(t, \tau) = x(t+\tau/2) y^*(t-\tau/2) \quad (2)$$

とおけば, 式(1)は,

$$W_{xy}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(t, \tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (3)$$

と書ける。

式(2)で与えられる $R_{xy}(t, \tau)$ は, 非定常信号に対して拡張された相互相関関数であると考えられる⁷⁾。以後これを非定常相互相関関数と呼ぶことにする。二つの変数 t, τ は, どちらも時間変数であるが, τ は従来の定常信号に対する相関関数の遅れ時間と同様のものであり, 一方 t は, この相関関数が時間の関数となることを示している。また, 式(2)に対して, 変数 t に関する平均(つまり時間平均)をとった結果は, 定常信号に対する相関関数と完全に一致する。そのうえ, 一方の時間関数を時間 τ だけずらすのではなくて, 双方を $\tau/2$ ずつずらすようになっているので, 自己相関関数が偶関数となる性質まで受け継いでいる。

ここで, 定常信号に対する相関関数の定義における時間平均操作は, 信号のエルゴード性^{*}を利用してアンサンブル平均[†]を置き換えたものであったことに注意しなければならない。したがって, 非定常な確率的信号に対する非定常相関関数を求めるためには, アンサンブル平均を求める必要がある。しかし, 確定的信号に対しては, あるいは, 確率的過程から得られた1アンサンブルを確定的信号とみなして扱うときには, アンサンブル平均の必要がなくなり,

二つの時間関数を乗算しただけで, 平均を行なっていない式(2)によって相関関数を求めることができるのである。

周波数と時間の二つの変数をもつ2次元のエネルギー分布を示す

従来の相互(自己)相関関数とクロス(オート)・パワー・スペクトルは, Wiener-Khintchine の定理によって, 互いにフーリエ変換対の関係で結ばれていた。式(3)から, 非定常相互(自己)相関関数に対しては, cross-(auto-)Wigner 分布がフーリエ変換対の関係となることがわかる。以上の事実から, Wigner 分布は, 非定常な信号に対して拡張されたパワー・スペクトルであると考えられる。ただし, 従来のパワー・スペクトルが, 周波数だけを変数とする, 信号の単位時間当たりの平均エネルギーの分布関数であったのに対し, Wigner 分布は, 時間と周波数の二つの変数に対する2次元のエネルギー分布関数である。

非定常相互(自己)相関関数の時間平均をとると, 従来の相互(自己)相関関数となるのと同様に, cross-(auto-)Wigner 分布の時間平均をとると, クロス(オート)・パワー・スペクトルとなる。定義通りのパワー・スペクトルの計算では, 非定常の相関関数を時間平均し, その後に相関関数の遅れ時間に関してのフーリエ変換を行なうと考えられるが, 時間平均とフーリエ変換の順序を逆にして, 先にフーリエ変換を行なった時点での中間結果が Wigner 分布であるということもできる。

受け入れやすい自然な性質を多く備える

式(1)で $y(t) = x(t)$ のとき求まる Wigner 分布 $W_{xx}(t, f)$ を, auto-Wigner 分布という。文献2)のなかで, auto-Wigner 分布のもつ性質が詳しく述べられている。そのうちのあるものは, 他の時間-周波数分布関数ももっている性質であり, またあるものは, auto-Wigner 分布固有の性質である。以下, これらの性質について述べる。なお, cross-Wigner 分布に関しては, 議論が煩雑になるため割愛する。

① 周波数に関して積分すると、瞬時パワーに等しい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t, f) df = |x(t)|^2$$

② 時間に関して積分すると、エネルギー・スペクトル密度関数に等しい。あるいは、時間に関して平均すると、パワー・スペクトルに等しい。すなわち、

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t, f) dt = |X(f)|^2$$

である。

③ 信号の時間シフトにより、Wigner 分布も時間シフトする。

$$y(t) = x(t - t_0) \rightarrow W_{yy}(t, f) = W_{xx}(t - t_0, f)$$

④ 信号の周波数シフト (変調) により、Wigner 分布も周波数シフトする。

$$y(t) = x(t) e^{j2\pi f_0 t} \rightarrow W_{yy}(t, f) = W_{xx}(t, f - f_0)$$

⑤ auto-Wigner 分布は、実関数である。

$$\text{Im}[W_{xx}(t, f)] = 0$$

⑥ 信号が時間軸上の有限区間でのみ非零の値をもつなら、

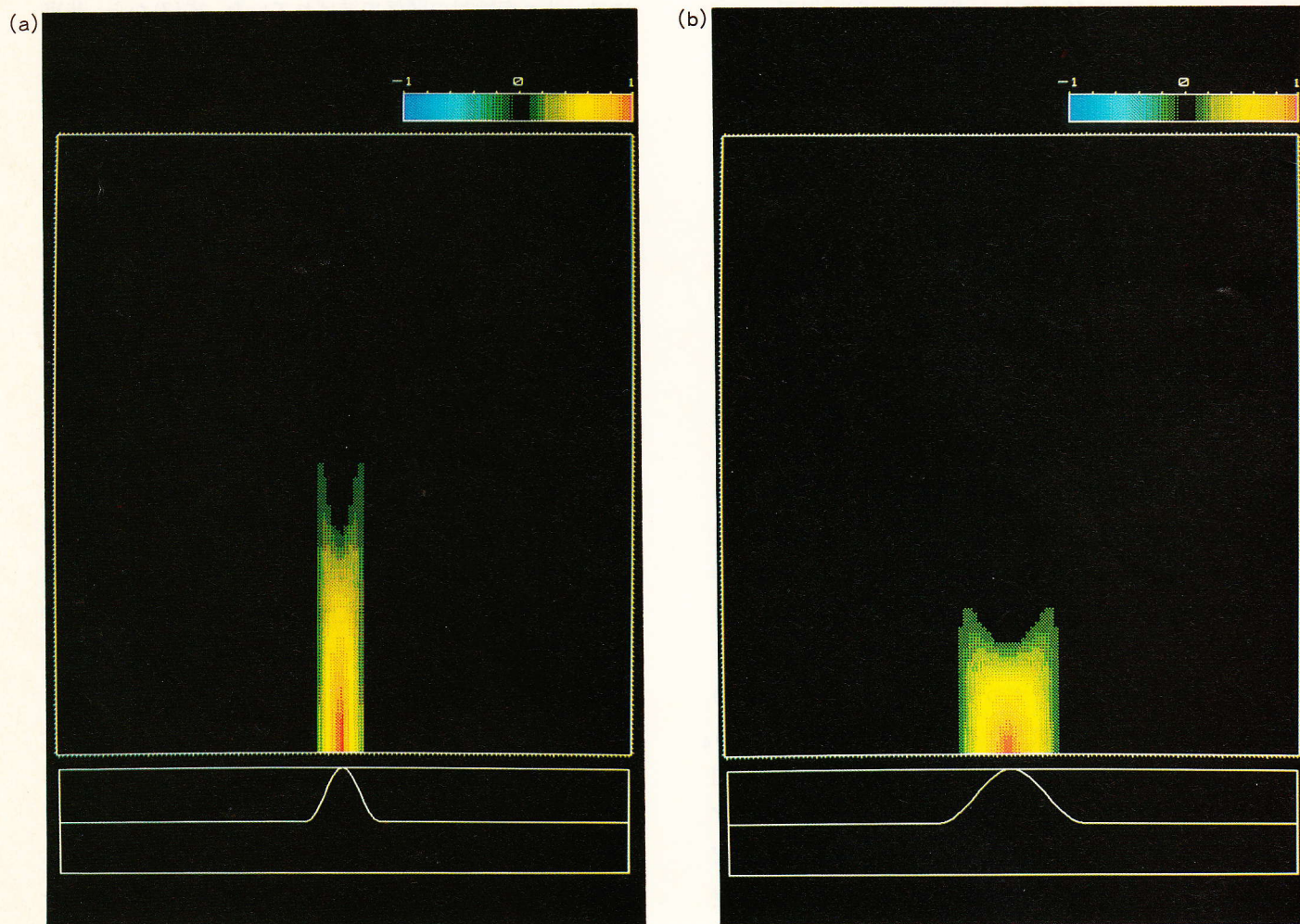


図1 長さの異なるハニング窓の Wigner 分布 下の波形が時間窓。カラーで示してあるのがその Wigner 分布である。横軸は時間軸 (離散点数で 128 点)、縦軸は周波数軸 (0 から標準化周波数の 1/2 まで)。カラーで Wigner 分布の強度を表現している。強度は +1 (赤) から -1 (青) までである。ハニング窓の長さは、(a) 16 点、(b) 32 点、(c) 64 点。窓の長さが増すにつれて、Wigner 分布の時間軸方向の広がりが増加し、周波数方向の広がりが減少するのがわかる。

Wigner 分布も同区間でのみ非零の値をもつ。

$$x(t)=0(t<a, b<t) \rightarrow W_{xx}(t, f)=0(t<a, b<t)$$

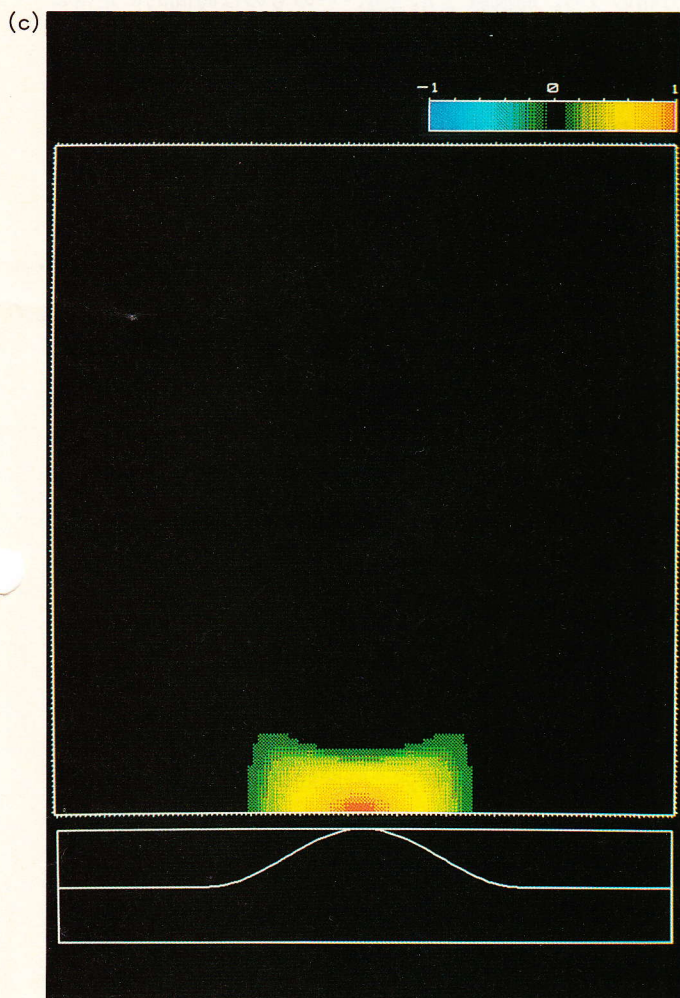
- ⑦ 信号が周波数軸上の有限区間でのみ非零の値をもつなら、Wigner 分布も同区間でのみ非零の値をもつ。

$$X(f)=0(f<a, b<f) \rightarrow W_{xx}(t, f)=0(f<a, b<f)$$

- ⑧ Wigner 分布の時間軸方向の重心は群遅延に等しい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} t W_{xx}(t, f) dt / \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t, f) dt = t_g(f)$$

- ⑨ 周波数軸方向の重心は瞬時周波数に等しい。



$$\int_{-\infty}^{\infty} f W_{xx}(t, f) df / \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx}(t, f) df = f_1(t)$$

従来から用いられてきた他の時間-周波数分布関数,たとえば cumulative attack (decay) spectrum, スペクトログラム,それに Page, Levin の分布関数^{8),9)}などは,これらの性質のうちの一部しかもたない。特に①②③④⑥⑦などは信号のエネルギーの時間-周波数分布として当然もっているべき性質と思われるが, attack (decay) spectrum, スペクトログラムは①②⑥⑦を, Page, Levin の分布関数は⑦をもたない。

もう一つ,時間-周波数エネルギー分布関数としての性質に関する重要な量として時間-周波数平面上でのエネルギー密度の広がり大きさがある。上記の分布関数は,どれも Wigner 分布より大きな広がりを生じる。Rihaczek の分布関数¹⁰⁾は, Wigner 分布と同様に上記の①から⑨の性質をすべてもつが,このエネルギー密度の広がり Wigner 分布に比べて非常に大きい。

逆に, Wigner 分布以外の時間-周波数分布関数ももっていて, Wigner 分布にはない性質もある。たとえば, スペクトログラムは非負の分布関数であり, エネルギー分布関数としては, 負値をも取り得る Wigner 分布よりも好ましいといえる。その代わり, スペクトログラムは, Wigner 分布に比べて, 前述のエネルギー密度の広がり大きい。また, Page, Levin, Rihaczek の分布関数は, 信号が零となる瞬間には, すべての周波数にわたってその値が零になる。Wigner 分布では, このような場合, 全周波数にわたって積分すれば値が零になるものの, 非零の値が現れる。しかし, 信号の値が零となる瞬間の瞬時パワー・スペクトルがすべての周波数において零にならないといけないというのは, かなり厳しい制約であると思われる。その代償として, Page, Levin, Rihaczek の分布関数では, エネルギーの広がり非常に大きくなってしまふ。

これらの事実から, Wigner 分布は他の代表的な時間-周波数分布関数に比べて概ね優れているといえる。ここで注意しなければならないのは, もともと時間-周波数平面上で現象を厳密に記述することは不可能であるということである。波動現象における時間と周波数の間には, Heisenberg

の不確定性のようなものが常に存在し、どちらかを突き詰めていっても、他方が曖昧になっていく。われわれに唯一可能なことは、この不確定性が支配する領域の直前まで踏み込むことができる強力な手段を模索することである。そして、Wigner 分布は今のところ最も強力な手段であると言える。

スペクトログラムのような時間分解能対周波数分解能のトレードオフがない

時間-周波数分布関数として、今のところ最も広く用いられているものはスペクトログラムであろう。

スペクトログラムとは、時間窓を移動しながら次々と短時間フーリエ変換によるパワー・スペクトルを計算し、その結果を時間（時間窓の位置）-周波数平面上で表現したもので、主に音声学などの分野で古くから用いられている。文献2)では、このスペクトログラムは、信号の Wigner 分布と、時間窓の Wigner 分布を時間-周波数平面上で2次元的に畳み込んだものであることが示されている。ここで、時間窓の長さを変えて、その時間窓の Wigner 分布を計算してみると、図1(a),(b),(c)のように、時間-周波数平面上での主極の時間方向の幅は時間窓の長さに比例し、一方周波数方向の幅は時間窓の長さに反比例することがわかる。結局、スペクトログラムにおいては、エネルギー分布のピンボケの度合、いわゆる時間分解能と周波数分解能は、互いにトレードオフの関係にあり、両者を任意に増加させることはできない。それに対し、後述の時間窓を用いた疑似 Wigner 分布ではない、本来の Wigner 分布では、このような分解能の低下は生じない。また、時間窓を用いる疑似 Wigner 分布でも、時間方向の分解能は低下しない。

クロス項や負の値が発生する問題点もある

今まで述べてきたように、Wigner 分布は時間-周波数分布関数として好ましい性質を多くもつが、一方いくつかの問題があるとされている。

[1]クロス項の発生

異なる周波数 $f_1, f_2, f_3, \dots$ の時間的に定常な正弦波成分からなる時間信号の auto-Wigner 分布を計算すると、時間-

周波数平面上の、周波数 $\pm f_1, \pm f_2, \pm f_3, \dots$ のところに非零の時間的に定常な分布が生じるが、それ以外の周波数にも非零の分布が生じることがわかる。図2は、周波数の異なる二つの正弦波を加算した信号（同図下部）の auto-Wigner 分布であるが、それぞれの正弦波の周波数に等しい周波数のところに定常な分布が生じ、その中間の周波数のところに、値が時間的に振動する分布が生じている。

一般に、auto-Wigner 分布では、このような複数の周波数成分を持つ信号に対して、周波数 $(\pm f_i \pm f_j)/2 (i, j=1, 2, 3, \dots)$ のところに非零の分布が生じる。これらの非零の分布のうち、周波数 $\pm f_1, \pm f_2, \dots$ のものは時間的に定常に現れるが、その他のものは、値が時間の推移につれ正負に振動して現れる。後者は、信号のパワー・スペクトルには現れないことからわかるとおり、時間軸方向に積分すれば零になってしまう。この振動成分は、一般にクロス項と呼ばれており、周波数の異なる成分間のうなりのようなものである。また、周波数が0のところに現れるクロス項は、信号の瞬時パワーの時間的変動分であるとも説明できる。

このクロス項は、式の上では、Wigner 分布が単純な線形変換ではない (cross-Wigner 分布における二つの時間関数のそれぞれについて線形である、いわゆる bilinear transformation である) ことに起因するものであると説明できる。前述の例で、周波数 f_i の定常信号を $x_i(t)$ とし、 N 個の $x_i(t)$ の和による信号を $x(t)$ とすると、 $x(t)$ の auto-Wigner 分布は、

$$W_{xx}(t, f) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N W_{x_i x_j}(t, f) \quad (4)$$

となる。右辺を展開したときの、 $i=j$ の項は、 $x_i(t)$ の auto-Wigner 分布であり、前述の時間的に定常な分布成分となる。一方、 $i \neq j$ の項は、異なる周波数成分間の cross-Wigner 分布であり、これが前述のクロス項となるのである。式(4)からも推察できるように、複数の周波数成分をもつ信号のクロス項は、周波数成分の個数の2乗に近い個数で現れるため、一般的な広帯域信号の auto-Wigner 分布は非常に複雑な姿になる傾向がある。

より一般には、時間-周波数平面上で任意の方向に隣あった二つの非零成分があるとき、両者のちょうど中間にこの

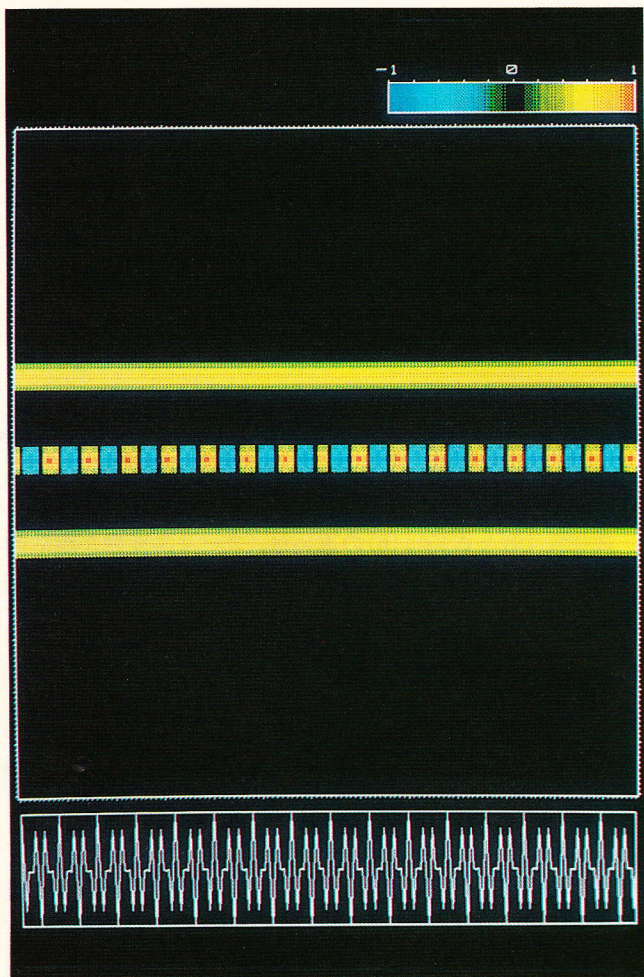


図2 周波数の異なる二つの正弦波を加算した信号のWigner分布 横軸は時間軸(128点)、縦軸は周波数軸(0から標準化周波数の1/2まで)。二つの正弦波の中間の周波数にクロス項が生じている。

クロス項が必ず生じるとされている。たとえば、図3のように、時間軸上で、二つのパルスが並んでいるような信号のWigner分布を計算すると、そのパルスの中間の時刻に、周波数方向に延びたクロス項が現れる。そのため、時間的に周波数構造が変化する信号の場合には、そのauto-Wigner分布は、さらに複雑なものになると考えられる。

クロス項は、一般に時間あるいは周波数の推移につれて、その値が正負に振動するため、適当なフィルタ操作によって低減することが可能である。しかし、Wigner分布を用いて眺めた信号の姿が、まさしくこのような格好をしている

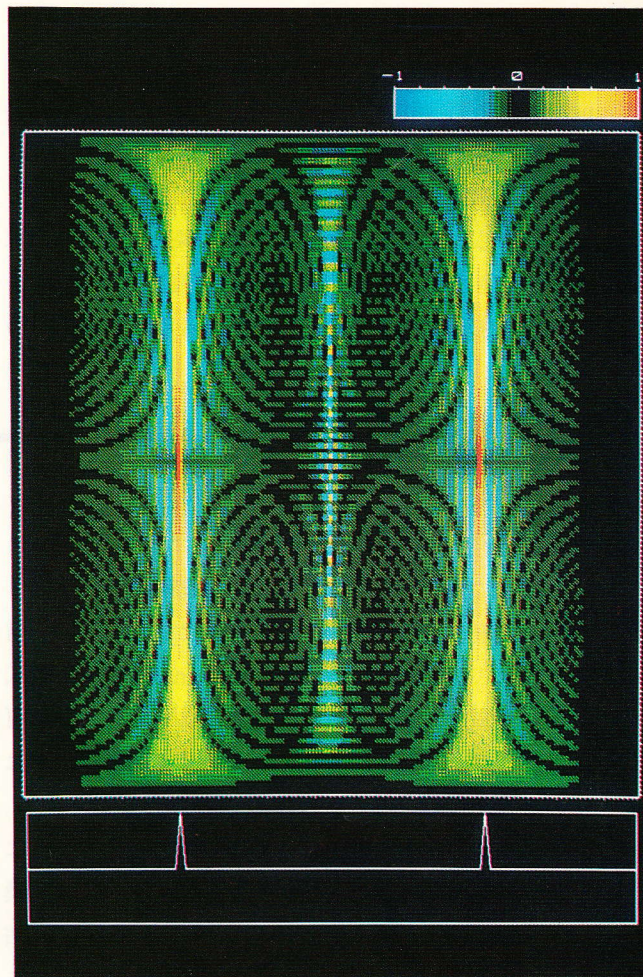


図3 時刻の異なる二つのパルスによる信号のWigner分布 横軸は時間軸(128点)、縦軸は周波数軸(0から標準化周波数の1/2まで)。二つのパルスの中間の時刻にクロス項が生じている。

のであり、パワー・スペクトルによる信号の姿になれた目に奇異に映るからといって、ただちにクロス項を消さなければならないというものでもない。しかし、クロス項の下に注目している成分が隠れてしまうといった場合には、このクロス項を低減して隠れた成分を見やすくするため、フィルタ操作を行なうことは有効であると思われる。

[2] 負の値の発生

auto-Wigner分布の、もう一つの問題は、auto-Wigner分布の値が、時間-周波数平面上で必ず非負になる保証はないということである。これは、auto-Wigner分布を信号の

エネルギーの時間-周波数分布関数であるとみなしたときに、負のエネルギー密度が生じる可能性があることを意味する。Wigner 分布では、時間-周波数平面上の値そのものについては、符号に関する制約は一切なく、ただ時間、あるいは周波数方向に積分すれば非負の値になることが保証されているのみである。この負の値の発生は、本来、厳密には求めることができない、エネルギーの時間-周波数分布を、あまりにも精密に求めようとしたために生じる不確定性の一つ

の表れであると考えられる。前述の、オートスペクトログラム (auto-spectrogram) では、時間窓を使用することにより、時間分解能と周波数分解能の積が抑えられてしまうので、不確定性を云々するところまでエネルギーの時間-周波数分布を追い求めることができない代わりに、負の値は絶対に生じない。また、auto-Wigner 分布を用いる場合にも、時間-周波数平面上で何らかの移動平均操作を行なうことで、負の値の発生を抑えることができる。

演算時の手法

離散的 Wigner 分布

今まで述べてきた Wigner 分布は、連続時間上で定義され、しかも無限の過去から、無限の未来にわたっての、信号の値を要する。したがって、厳密な Wigner 分布は、数式で与えられた関数に対する解析的計算によってのみ計算可能である。これは、厳密な意味でのフーリエ変換が、やはり机上の計算でのみ可能であることと同じである。

フーリエ変換が、現在このように広く用いられるようになったのは、数値計算による離散的な短時間フーリエ変換の実用性が広く受け入れられたことと、その高速算法 (FFT: 高速フーリエ変換) が発見されたことが原因であろう。Wigner 分布に対しても、離散時間における、時間窓を用いた定義を与えることで、その実用性を増すことができる。

まず、離散時間における Wigner 分布の定義を与える。標本化周期を T_s として、式(2)、式(3)の変数を、

$$t = nT_s$$

$$\tau = mT_s$$

$$2\pi f T_s = \Omega$$

と置き換える。さらに時刻 nT_s における信号 $x(t)$ の標本値を $x(n)$ と書くことにすると、離散的 Wigner 分布は下式のようになる。

$$W_{xy}\left(n, \frac{\Omega}{2}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_n(m) e^{-jm\Omega} \quad (5)$$

$$u_n(m) = 2x(n+m)y^*(n-m) \quad (6)$$

式(2)、(3)と式(5)、(6)の違いは、フーリエ変換が離散的フーリエ変換に置き換わったことと、標本化によって分布が周波数に関して周期的になったことである。また、式(5)の左辺において周波数に係数 $1/2$ がついているのは、式(2)の τ の係数 $1/2$ のためであるが、その結果、Wigner 分布の周波数 f における値は、式(5)の右辺の離散的フーリエ変換の周波数 $2f$ における値によって求められることになる。一方、離散的フーリエ変換は、標本化周波数で正規化された角周波数 (以後単に周波数) に関して周期 2π をもつから、離散的 Wigner 分布は、周波数に関して周期 π をもつことになる。これは、たとえ信号が標本化定理を満足するように標本化されていても、 $|\Omega| > \pi/2$ の周波数において非零の成分をもつ場合には、求められる離散的 Wigner 分布に折り返し歪が生じることを示している。したがって、信号を標本化する際に、含まれる最高周波数の 4 倍以上の標本化周波数で標本化を行なうか、または最高周波数の 2 倍以上の標本化周波数で標本化を行なった後に遮断周波数が $\pi/2$ 以下の数値フィルタを用いて帯域制限を行なうかのどちらかの対策を講じなければならない。ただし、後述する解析信号の利用により、この折り返しの問題は自動的に解決される。

時間窓を使っても時間方向へのエネルギー密度の広がりが生じない離散的 Wigner 分布

離散的 Wigner 分布を実用的な計算量で求めるには、時間窓を用いた定義が必要である。

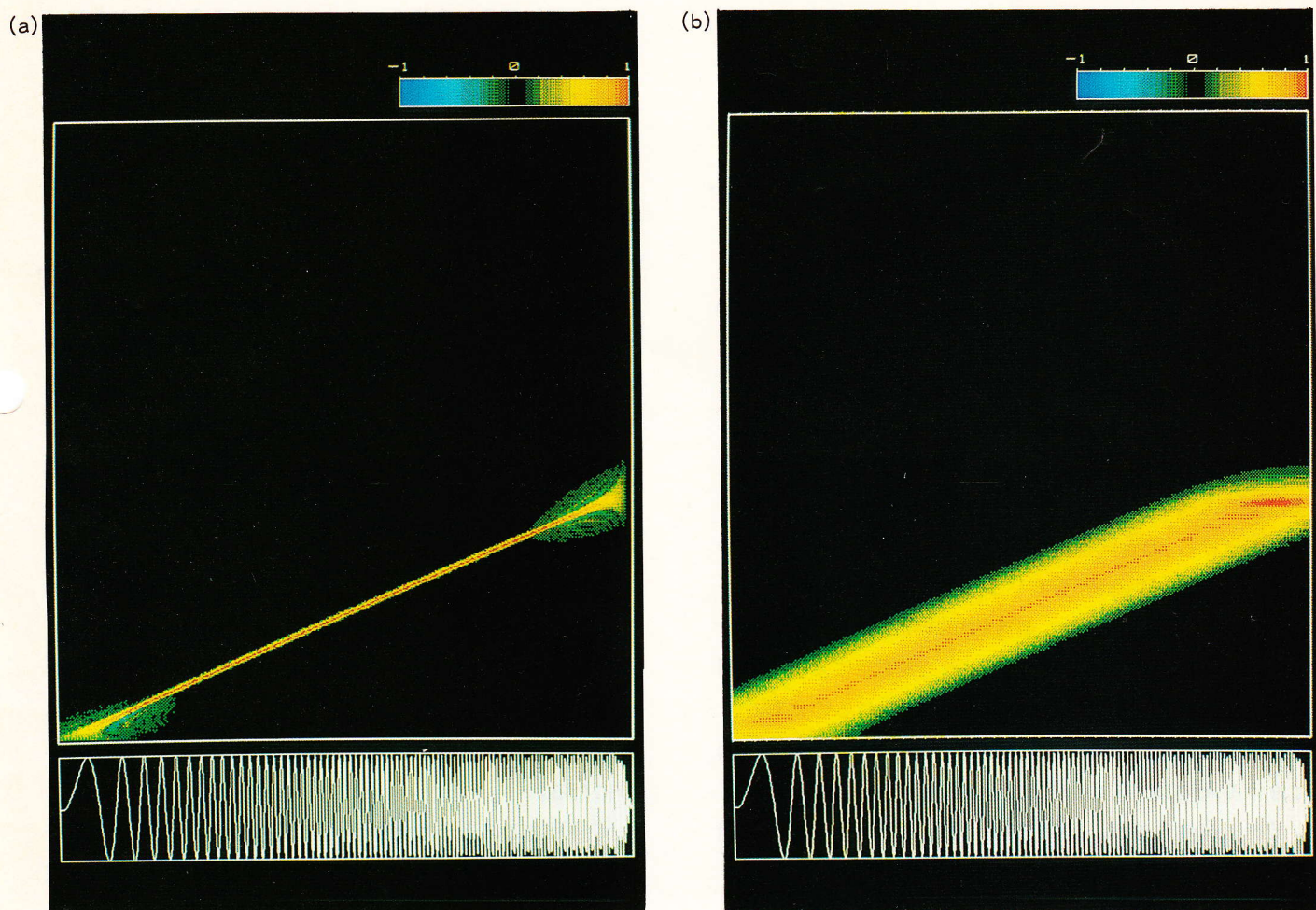


図4 Wigner 分布とスペクトログラムの比較 横軸は時間軸 (1024 点), 縦軸は周波数軸 (0 から標本化周波数の 1/2 まで)。信号は時間とともに周波数が増加するチャープ信号。(a) の auto-Wigner 分布に比べて, (b) のオートスペクトログラムでは広がり大きい。

長さ M 点の離散時間上の時間窓 $w(m)$ ($-M/2+1 \leq m \leq M/2$ で非零の値をもつ) を用いて, 式(5), (6)における数列に対して, 注目している時刻の近傍で重みをかけると, 下式となる。

$$W_{xy}(n, k) = \sum_{m=-M/2+1}^{M/2} u_n(m) e^{-j2\pi mk/M} \quad (7)$$

$$u_n(m) = 2x(n+m)w(m)y^*(n-m)w^*(-m) \quad (8)$$

式(7)は, 有限長数列に対する離散的フーリエ変換の形をしており, 高速フーリエ変換 (FFT) の算法によって高速に計算できる。また, 周波数はもはや M 点の離散値しかとり得ないので, 離散的フーリエ変換の慣習にならい, 周波

数のかわりに component number k を用いることにする。ただし, 離散的フーリエ変換の場合とは異なり, $[0, M)$ の k は, $[0, 2\pi)$ でなく, $[0, \pi)$ の周波数に対応していることに注意しなければならない。

時間窓の導入により Wigner 分布の実用的な計算が可能になるが, 半面, 本来の Wigner 分布のもつ性質の一部が失われる可能性があることに注意しなければならない。たとえば, 時間窓を用いて計算された auto-Wigner 分布を時間方向に加算しても, もはやその結果がパワー・スペクトルに一致する保証はない。また, 時間窓の使用により, 時間-周波数平面上で, 周波数方向の広がりが生じるため, 周波

数領域で帯域制限された信号の auto-Wigner 分布が、制限帯域外で非零の値を持つ可能性がある。しかし、時間窓を用いることで、数学的厳密性を失うかわりに実用性が獲得されるという事情は、離散的フーリエ変換と同様であり、本来の Wigner 分布との違いを十分承知のうえで用いれば、FFT 同様強力な信号解析手法となるであろう。そういった意味で、時間窓を用いた離散的 Wigner 分布を、以後は、疑似 Wigner 分布と呼ぶことにする（文献²⁾では、pseudo Wigner distribution の語が用いられている）。

時間窓関数、およびその長さを決定するために考慮しなければならない点は、離散的短時間フーリエ変換における時間窓の選択とほぼ同じである。離散的短時間フーリエ変換によるスペクトルが、窓関数のフーリエ変換によって「ピン트가ぼける」と同様、時間窓を用いた離散的 Wigner 分布は、窓関数の Wigner 分布によって周波数方向に「ピン트가ぼけて」いる。しかし、離散的短時間フーリエ変換によって求められたスペクトログラムは、時間窓によって時間方向、周波数方向のどちらにも広がりが生じるのに対し、疑似 Wigner 分布では、窓関数の Wigner 分布の中心時刻における周波数方向の分布によって、各時刻における「ピンボケ」が生じるが、時間方向への広がりには生じない。図 4(a), (b) は、周波数が時間とともに増加するチャープ信号の auto-Wigner 分布と、オートスペクトログラムを、同じ時間窓（長さ 512 点の離散的なハニング窓）を用いて計算したものである。両者の時間-周波数平面上での広がりの違いは決定的である。

結局、計算可能な限り窓の長さを大きくとった方が、本来の Wigner 分布に近い結果が得られるであろうし、矩形窓よりもハニング窓やガウス窓などのサイドローブの少ない窓関数を用いた方が多くの場合満足いく結果を得られるであろう。しかし、時間-周波数分布の大体の傾向をつかみたいといった場合には、より短い時間窓の使用も有効であろうし、なんらかの目的のために特殊な時間窓を用いることが有効である可能性もあるであろう。疑似 Wigner 分布は、本来の Wigner 分布とは異なるものであるということを承知のうえで用いるならば、われわれは個々の問題における必要に応じて時間窓を選択すればよいのである。

信号を解析信号に変換してから Wigner 分布を求める

時間の実関数として表される信号を実信号と呼ぶ。実信号のフーリエ変換は、正負の周波数域で共役対称となる。また、元の時間信号は正か負のどちらかの周波数域におけるフーリエ変換の値のみから完全に復元できる。言い換えれば、負の周波数域におけるパワー・スペクトルは正の周波数域におけるパワー・スペクトルと完全に等しいために、情報量をまったくもたらさない冗長成分である。同様に、実信号に対する Wigner 分布にもなんらかの冗長性が含まれていると考えられる。実際、実信号の Wigner 分布も、正負の周波数域で対称となり、そのため負の周波数域における Wigner 分布は冗長である。また、信号の負の周波数の成分と正の周波数の成分によるクロス項も、やはり冗長であると考えられる。

ある実信号に対して、正の周波数域においては実信号のフーリエ変換の値と一致し、負の周波数域では成分が零となるような複素信号を解析信号と呼ぶ。解析信号には、もはや前述した冗長性は一切含まれていない。また、負の周波数域が零であるため、信号の周波数帯域幅が実信号の半分になる。

実信号をこのような解析信号に変換してから Wigner 分布の計算を行なうことで、前述した Wigner 分布の冗長成分が生じないようにできる。もちろん、実信号の Wigner 分布と、解析信号の Wigner 分布とはまったく異なるものではあるが、後者は前者に含まれる「情報量をもたない成分」を除いたものと考えられ、信号の情報は一切失われてはいない。

解析信号を用いるもう一つの利点は、信号の周波数帯域幅が半分になるため、離散的 Wigner 分布固有の、周波数軸上での折り返し歪の問題を回避することができることである。前述のように離散的 Wigner 分布では、周波数 $\pm \pi/2$ のところで折り返しが生じるため、標本化の際に注意が必要である。しかし、通常の標本化定理を満たすように実信号を標本化した後、解析信号に変換すれば、 $[-\pi, 0]$ の周波数成分が零となる。そのため、離散的 Wigner 分布の計算により $[-\pi/2, 0]$ の成分と $[+\pi/2, \pi]$ の成分との重なりが生じず、折り返し歪は生じない。

応用例

Wigner 分布を用いた瞬時音響インテンシティ計測

Wigner 分布の一つの応用例として、われわれが行なっている音響インテンシティ計測法への応用の概要、および実験結果を紹介する。

音響インテンシティとは、空間のある単位面積を通過して流れる音響エネルギーの時間平均として定義されるベクトル量であり、電気回路における電力に相当するようなものである。空間のある1点における音響インテンシティ I は、その点における音圧 $p(t)$ と粒子速度 $v(t)$ の積の時間平均によって与えられる。

$$I = \overline{p(t)v(t)} \quad (9)$$

実際に、音響インテンシティを求めるためには、音圧と粒子速度を観測しなければならないが、粒子速度を精密に、安定して測定できる方法は現在のところ存在しないので、式(9)は実際には使えない。しかし、流れのない媒質中では粒子速度は、音圧の空間微分から求めることができるので、通常、近接した二つのマイクロホンを用いて音圧を測定し、両者の差分をもって空間微分の代用とする近似計算が行なわれる^{11),12)}。

さて、Wigner 分布を、信号のエネルギーの時間-周波数分布関数として用いることができるならば、音圧と粒子速度の cross-Wigner 分布によって、空間のある1点における音響エネルギーの時間-周波数分布を得ることができると考えられる。この、空間のある1点における音響エネルギー、ある時刻 t 、ある周波数 f における値を $I(t, f)$ と記すこととし、瞬時音響インテンシティ・スペクトルと呼ぶことにする。瞬時音響インテンシティ・スペクトルは、次式で与えられる。

$$I(t, f) = W_{pv}(t, f) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} p(t + \tau/2) v^*(t - \tau/2) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (10)$$

ここで、粒子速度に対して前述したような近似を行なう。密度 ρ の媒質中で、空間の r 方向に距離 d だけ隔てて並んだ2点で測定された音圧 $p_1(t)$ 、 $p_2(t)$ を用いて、2点の中点

における音圧 $p(t)$ 、および粒子速度の r 方向の成分 $v_r(t)$ は、次式で与えられる。

$$p(t) = [p_1(t) + p_2(t)]/2 \\ v_r(t) = -\frac{1}{\rho d} \int_{-\infty}^t [p_2(t') - p_1(t')] dt' \quad (11)$$

すると、式(10)は、次式のように変形できる。

$$I(t, f) = -\frac{1}{2\pi f \rho d} \text{Im}[W_{p_1 p_2}(t, f)] \\ -j \frac{1}{4\pi f \rho d} [W_{p_1 p_1}(t, f) - W_{p_2 p_2}(t, f)] \quad (12)$$

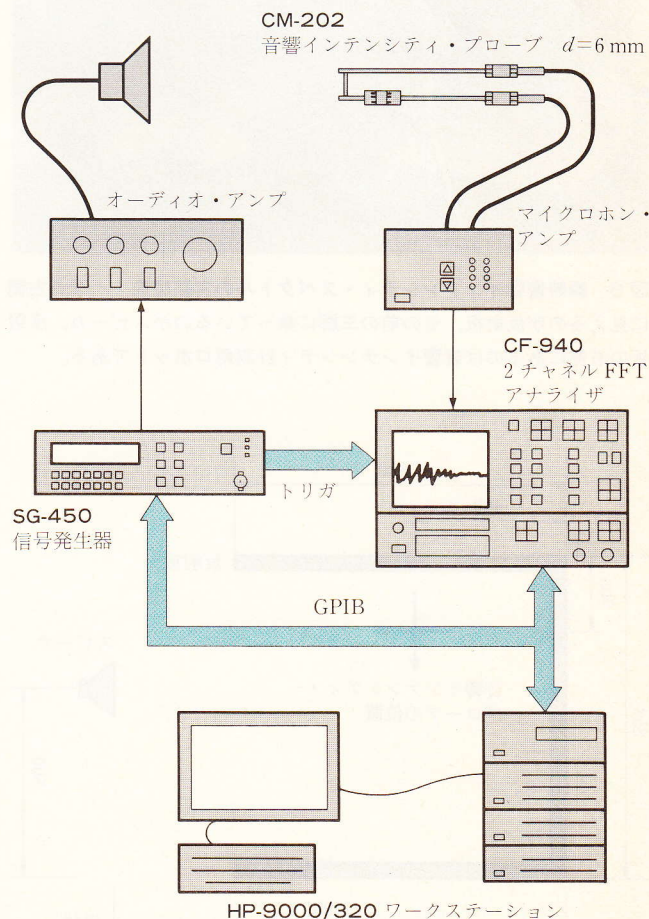


図5 瞬時音響インテンシティ・スペクトルの実験に用いたシステム

式(12)の実効分のみ取り出し、それを $i(t, f)$ と記すことにする。

$$i(t, f) = \text{Re}[I(t, f)]$$

$$= -\frac{1}{2\pi f \rho d} \text{Im}[W_{p_1 p_2}(t, f)] \quad (13)$$

$i(t, f)$ は、結局、空間の2点で測定された音圧間の cross-

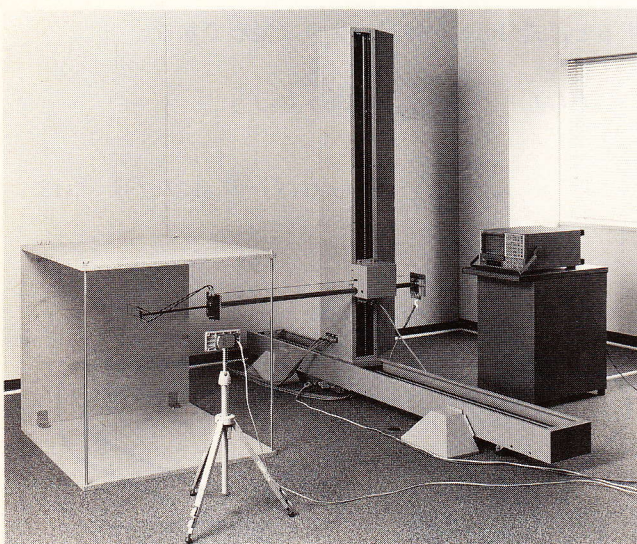


図6 瞬時音響インテンシティ・スペクトルの実験風景 写真左側に見えるのが反射板、その前の三脚に乗っているのがスピーカ、反射板の右側にあるのは音響インテンシティ計測用ロボットである。

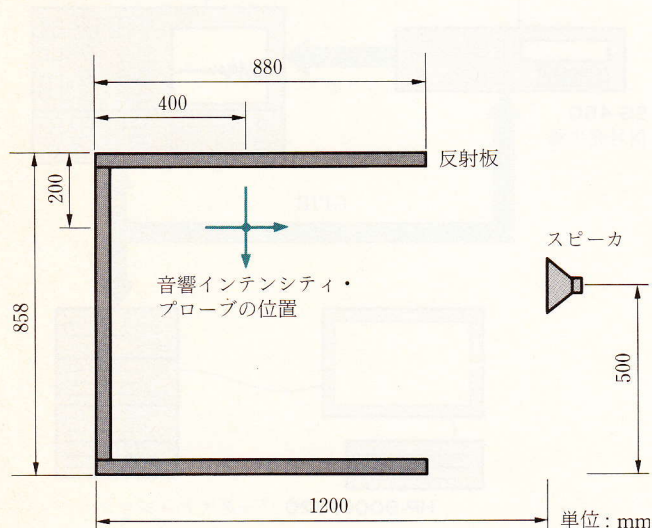


図7 実験1の反射板、プローブ、スピーカの配置

Wigner 分布から求められる。以後、特に断らない限り、この瞬時音響インテンシティ・スペクトルの実効分のことを、単に瞬時音響インテンシティ・スペクトルと呼ぶ。

瞬時音響インテンシティ・スペクトルの測定実験

前述の瞬時音響インテンシティ・スペクトルの有効性を確認するために行なった実験の概要と結果について述べる。

2種類の実験を行なったが、実験システム、解析法はまったく同一である。実験システムの構成を図5に示す。2チャンネルFFTアナライザは、信号(12ビット)取り込みと同期加算にのみ用い、それ以後の信号処理はすべて、ワークステーション上で開発した信号処理用環境を用いて行なっている。システムの処理速度としては、信号を取り込んでから、Wigner 分布を時間-周波数平面上の 256×256 点で計算し、カラー表示するまで、およそ4分弱の計算時間を要する。内部演算は64ビット。

[実験1]

図6、図7のように、床、壁、天井に相当する3枚の反射板に囲まれた空間に、音源からバースト信号を放射し、空間内の一点における瞬時音響インテンシティ・スペクトルの垂直成分、水平成分を求めた。実験の目的は、Wigner 分布の高い時間-周波数分解能によって、さまざまな径路を伝播してくる反射音の強さと到来方向を知ることが可能かどうか調べることである。

放射した信号は、10 kHz の正弦波4周期分のバースト信号で、オーディオ用トゥイータから放射した。音響インテンシティ・プローブは、二つの対向する1/4インチ・マイクロホンと、 $d=6\text{ mm}$ のスペーサを組み合わせたもの。

瞬時音響インテンシティ・スペクトルの水平、垂直成分を求め、ベクトル表示をした結果を図8に示す。瞬時音響インテンシティ・スペクトルは、時間-周波数平面上 32×32 点で求め、そのすべてを表示した。図中のそれぞれの矢印は、一つの測定点における瞬時音響インテンシティ・スペクトルの、ある時刻、ある周波数における成分をベクトル的に表現している。具体的には、矢印の方向がベクトルの空間的方向つまり波の進行方向を示し(座標は図7に一致させている)、矢印の長さがベクトルの長さの対数に比例す

るように描いた。時間-周波数平面上での瞬時音響インテンシティ・スペクトルの最大値を 0 dB としたときに、-20 dB (瞬時音響インテンシティ・スペクトルの大きさが 1/100) を示す矢印の長さが 0 になるようにしてある。したがって、-20 dB 以下の成分は表示されていない。

結果を見ると、時間の推移とともにさまざまな方向から反射音が到来する様子が、よくとらえられている。表 1 に示した、幾何学的に計算した反射音の到来方向と比べても、よく一致していることがわかる。このように、瞬時音響インテンシティ・スペクトルは、Wigner 分布の持つ高い時間-周波数分解能を利用できるので、時間的に変化する音場の様子をよくとらえることができるのである。

[実験 2]

3 kHz 付近にクロスオーバー周波数を持つネットワークに接続された高域用スピーカ (25 mm 径) と中域用スピーカ (80 mm 径) から放射される音の、瞬時音響インテンシティ・スペクトルをスピーカ前方の 1 点で求めた。実験概要を 図 9 に示す。スピーカから放射した信号は、その周波数が 0 から 10 kHz まで時間の指数関数的に 20 ms で変化するチャープ信号である。

実験の目的は、周波数の変化とともに音源位置が変化する様子を、Wigner 分布でどのようにとらえることができるかを知ることである

図 9 のようなプローブ位置における瞬時音響インテンシティ・スペクトルの水平、垂直成分を時間-周波数平面上 32 × 32 点 (実際は周波数方向には 64 点で求めて、直流から標

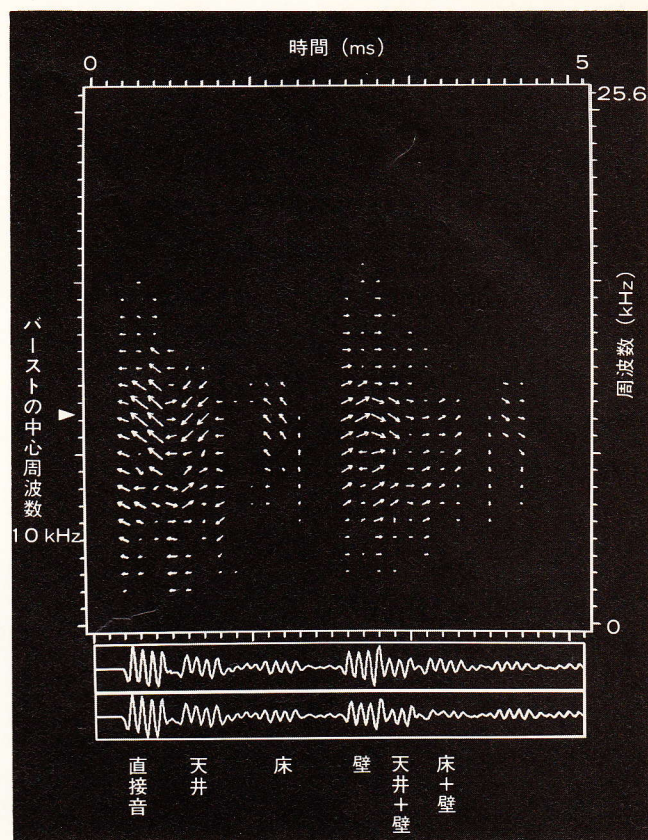


図 8 実験 1 の結果 横軸は時間軸 (全長 5 ms)、縦軸は周波数軸 (0 から 25.6 kHz) である。ある時刻、ある周波数における矢印の長さや方向は、その時刻、周波数における瞬時音響インテンシティ・スペクトル (空間的にはただ 1 点で測定されている) の絶対値の対数、および、空間的な方向を表している。左から順に、直接音、天井からの反射、床からの反射、壁からの反射、天井と壁の多重反射、床と壁の多重反射である。表 1 と見比べてもわかるように、各反射音の方向がよくとらえられている。

表 1 幾何学的に求めた反射音到来方向

(図 7 の水平右方向を 0 度とし、反時計回りにとった角度)

反射径路	直接音	天井	床	壁	天井+壁	床+壁
	-18 度	39 度	-53 度	-171 度	158 度	-147 度
測定点から見た方向						

本化周波数の1/4に対応する最初の32点を表示している)において計算し、最後に水平、垂直成分を併せて2次元のベクトル量として表示した。その結果を図10に示す。

時間-周波数平面上に描かれている矢印は、実験1と同様、その時刻、その周波数における瞬時音響インテンシティ・スペクトルのベクトル量を表している。ただし対数をとっておらず、矢印の長さは、ベクトルの大きさに比例している。矢印の方向は、ベクトルの空間的方向に対応しており、座標のとり方は図9と一致させている。

結果を見ると、スピーカ・システムから放射される音響エネルギーのうち、低い周波数の成分については中域用スピー

カの方向から、高い周波数成分については高域用スピーカの方向から到来していること、クロスオーバー周波数のあたりでその方向が徐々に移り変わっていることがよくわかる。また、矢印の長さから、比較的高い周波数まで均等に音響エネルギーが放射されていることがわかる。さらに、空間の格子上の複数点で測定を行い、それぞれの点で図10のような表示を求めれば、スピーカ・システムの周波数特性と指向特性を同時に表現することができると思われる。

今後の課題

Wigner 分布には、すでに述べてきたような問題点もあ

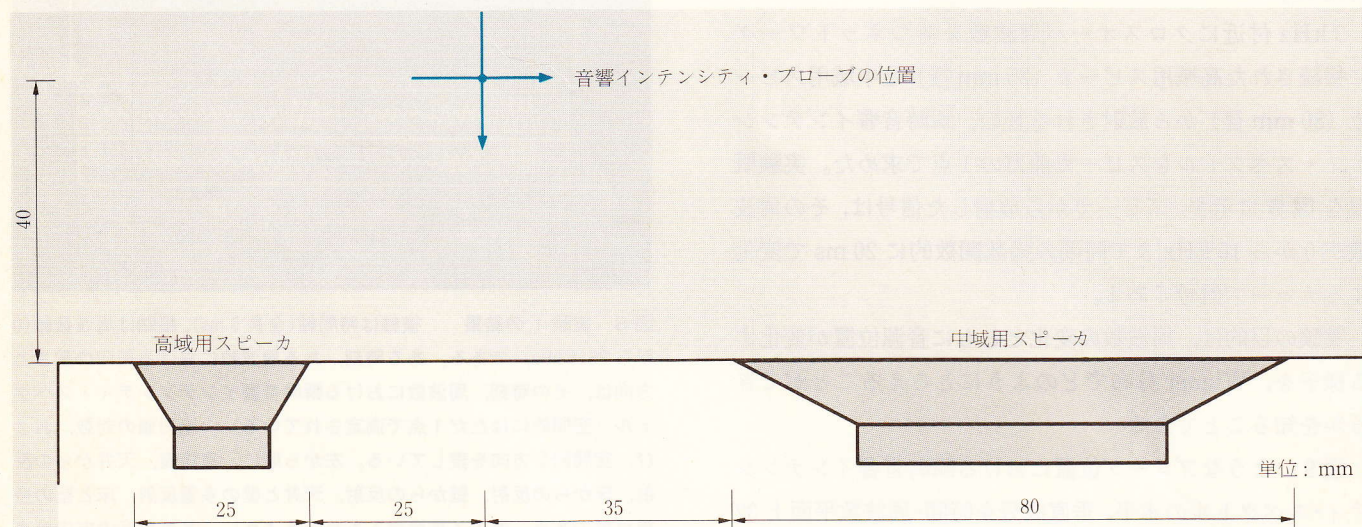


図9 実験2のスピーカ、プローブの配置

用語の説明 (本文中↑印の付いている用語を説明)

▷ **定常信号と非定常信号**＝平均や分散、あるいは自己相関関数といった統計的性質が時刻とともに変動するような過程を非定常過程といい、統計的性質が時刻によらず一定であるような過程を定常過程という。また、それらの過程を観測して得られた信号をそれぞれ、非定常信号、定常信号という。

▷ **アンサンブル平均**＝確率的過程の観測によって得られた一つの標本記録は、起こり得る多くの可能な結果のただ一つをとらえたものにすぎない。その背後にある、確率的過程を記述する統計

的性質は、多くの標本記録を集めそれらに対する平均を行なうことで求められる。この操作をアンサンブル平均という。

▷ **エルゴード性**＝定常過程のうち、あるものについては、アンサンブル平均の代わりにただ一つの標本記録に対する時間平均を行なうことによっても、その統計的性質を定めることができる。特に、平均と自己相関関数を時間平均によって求め得るような過程をエルゴード性であるという。実際の定常的な物理現象は多くの場合、エルゴード性である。

るが、それを補って余りあるほどのパワーがある。今後も、フーリエ変換のように、「万能ツール」として用いられるようになるとは思えないが、問題によっては大きな威力を発揮する「特殊工具」といった使われ方で普及していくだろう。

Wigner 分布がより広く使われるようになるためには、この手法の存在を広く知らせることと、実用性を上げるための不断の努力が必要であろう。特に、計算時間については、なんらかの高速算法が存在しないものであろうか。それから、フーリエ変換的なセンスから、Wigner 分布的センスへの切り替えといったものが今後要求されるのではないと思われる。Wigner 分布的センスというのが果たして

どのようなものかは現時点でははっきりしないが、今後、Wigner 分布の普及につれて確実に蓄積されていくであろうと期待している。

もう一つ大事なことは、Wigner 分布の問題点であると言われている、クロス項の発生、負の分布といったものが、それほど問題とならないような応用法を模索することである。たとえば、われわれが実験でしばしばチャープ信号を用いるのは、クロス項の問題を回避するためである。また、逆にクロス項を含めた Wigner 分布の全体像に対して、明快な解釈を与えることも必要であろう。われわれも、今後、より実用的な Wigner 分布の応用法を検討していきたい。

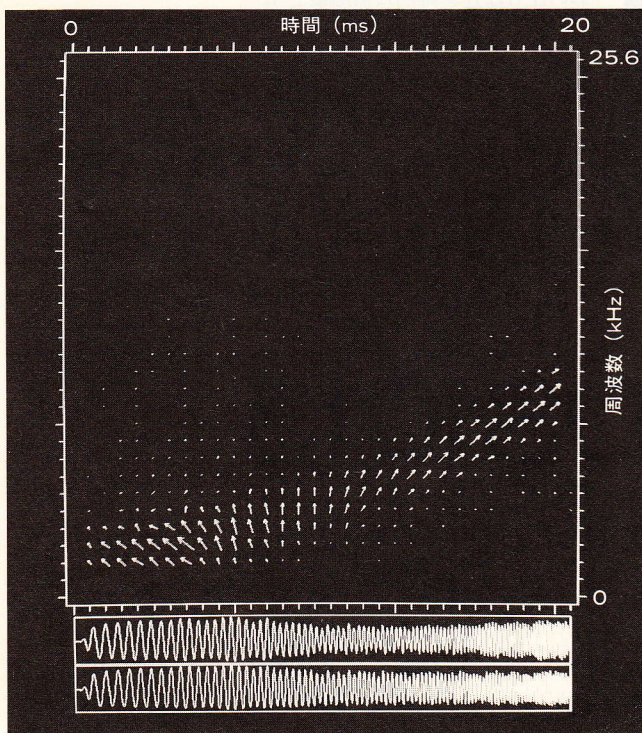


図 10 実験 2 の結果 横軸は時間軸 (全長 20 ms)、縦軸は周波数軸 (0 から 25.6 kHz) である。ある時刻、ある周波数における矢印の長さや方向は、その時刻、周波数における瞬時音響インテンシティ・スペクトル (空間的にはただ 1 点で測定されている) の絶対値、および、空間的な方向を表している。矢印をみれば、信号の周波数が上昇する (時間がたつ) につれて、まず右下から、次いで真下から、最後には左下から音が測定点に向かうのがわかる。すなわち、周波数の変化とともに、音を放射するスピーカが中域用スピーカから高域用スピーカに移り変わっていくのがわかる。

参考文献

- 1) Wigner, E., "On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium," *Physical Review*, vol. 40, pp. 749-759, June 1932.
- 2) Claasen, T. A. C. M. and Mecklenbräuker, W. F. G., "The Wigner Distribution—A Tool for Time-Frequency Signal Analysis Part I: Continuous-Time Signals," *Philips J. Res.*, vol. 35, pp. 217-250, 1980.
- 3) Claasen, T. A. C. M. and Mecklenbräuker, W. F. G., "The Wigner Distribution—A Tool for Time-Frequency Signal Analysis Part II: Discrete-Time Signals," 同上, vol. 35, pp. 276-300, 1980.
- 4) Claasen, T. A. C. M. and Mecklenbräuker, W. F. G., "The Wigner Distribution—A Tool for Time-Frequency Signal Analysis Part III: Relation with Other Time-Frequency Signal Transformations," 同上, vol. 35, pp. 372-389, 1980.
- 5) Janse, C. P. and Kaizer, A. J. M., "Time-Frequency Distributions of Loudspeakers: The Application of the Wigner Distribution," *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 31, pp. 198-223, 1983.
- 6) 鈴木, 川浦, 「Wigner 分布の音響インテンシティ計測への応用」, 『日本音響学会騒音研究会資料』, N87-04-2, 1987 年 4 月.
- 7) Bendat, J. S. and Piersol, A. G., 『ランダムデータの統計的処理』, 培風館, pp. 356-363.
- 8) Page, C. H., "Instantaneous Power Spectra," *J. Appl. Phys.*, vol. 23, pp. 103-106, Jan. 1952.
- 9) Levin, M. J., "Instantaneous Spectra and Ambiguity Functions," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. IT-10, pp. 95-97, 1964.
- 10) Rihaczek, A. W., "Signal Energy Distributions in Time and Frequency," 同上, vol. IT-14, pp. 369-374, May 1968.
- 11) Fahy, F. J., "Measurement of Acoustic Intensity Using The Cross-Spectral Density of Two Microphone Signals," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 62, no. 4, pp. 1057-1059, 1977.
- 12) Chung, J. Y., "Cross-Spectral Method of Measuring Acoustic Intensity Without Error Caused By Instrument Phase Mismatch," 同上, vol. 64, no. 6, pp. 1613-1616, 1978.